# <u>Лекция 6</u>
# Численные методы решения задач оптимизации

**Вопросы лекции**

1. Основные понятия в области задач оптимизации.

2. Нелинейное программирование. Методы решения одномерных и многомерных задач без ограничений и с ограничениями.

3. Линейное программирование. Геометрический и симплекс-метод

# <u>Вопрос 1.</u>
# Основные понятия в области задач оптимизации

**п. 1.1 Определения**

**Оптимизация** – процесс выбора наилучшего варианта из всех возможных. В процессе решения задач оптимизации необходимо найти оптимальные значения некоторых (проектных) параметров, определяющих данную задачу.

Выбор оптимального решения или сравнение двух альтернативных решений проводится с помощью некоторой зависимой величины (функции), определяемой проектными параметрами. Эта величина называется *целевой функцией* (или *критерием качества*). В процессе решения задачи оптимизации должны быть найдены такие значения проектных параметров, при которых целевая функция имеет минимум (или максимум). Таким образом, целевая функция — это глобальный критерий оптимальности в математических моделях, с помощью которых описываются инженерные или экономические з

$$u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Следует отметить, что целевая функция не всегда может быть представлена в виде формулы. Иногда она может принимать только некоторые дискретные значения, задаваться в виде таблицы и т. п. Во всех случаях она должна быть однозначной функцией проектных параметров.

*Целевых функций может быть несколько*

**п.1.2 Задачи оптимизации**

# Задачи оптимизации

## БЕЗУСЛОВНЫЕ

Отыскание *max* или *min* действительной функции от *n* действительных переменных и определении соответствующих значений аргументов на некотором множестве σ *n*-мерного пространства.

## УСЛОВНЫЕ

*(или с ограничениями)*

### Ограничения-равенства

$$
\begin{aligned}
g_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= 0,\\
g_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= 0,\\
\cdots\cdots&\cdots\cdots\\
g_m(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= 0.
\end{aligned}
$$

### Ограничения-неравенства

$$
\begin{aligned}
a_1 \leqslant \varphi_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) &\leqslant b_1,\\
a_2 \leqslant \varphi_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) &\leqslant b_2,\\
\cdots\cdots&\cdots\cdots\\
a_k \leqslant \varphi_k(x_1, x_2, \ldots, x_n) &\leqslant b_k.
\end{aligned}
$$

Результатом решения задачи оптимизации считаются оптимальные значения управляемых параметров $\boldsymbol{m}^*$, при которых достигается экстремум (оптимальное значение) целевой функции $\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{m})$:

$$\boldsymbol{m}^* = \arg \operatorname*{extr}_{\boldsymbol{m} \in \boldsymbol{M}} \boldsymbol{Q}(\boldsymbol{m}).$$

Экстремальное (оптимальное) значение целевой функции $\boldsymbol{Q}^*=\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{m}^*)$ тоже относится к результату решения задачи оптимизации:

$$\boldsymbol{Q}^* = \operatorname*{extr}_{\boldsymbol{m} \in \boldsymbol{M}} \boldsymbol{Q}(\boldsymbol{m}) = \boldsymbol{Q}(\boldsymbol{m}^*)$$

## Другие варианты формализованной записи задач оптимизации

При выполнении условий

$$g_i(x_1, \ldots, x_n) * b_i, \quad i = \overline{1, m} \tag{4.1}$$

необходимо найти параметры $(x_1, \ldots, x_n)$, при которых функция $\Phi(x_1, \ldots, x_n)$ принимает наибольшее или наименьшее значение.

Условия (4.1) задают множество (набор) $G_x$, что записывается следующим образом:

$$G_x = \{x_1, \ldots, x_n: g_i(x_1, \ldots, x_n) * b_i, \ i = \overline{1, m}\},$$

т. е. $G_x$ — множество наборов параметров $\{x_1, \ldots, x_n\}$, для которых выполняются соотношения (4.1).

Условия (4.1) называются ограничениями задачи. Знак $*$ в них показывает, что могут иметь место отношения вида $>$, $<$ или $=$. При этом необязательно, чтобы знаки отношений для всех $i$ были одинаковыми. Возможны также и другие способы определения множества $G_x$. Так, дополнительно к (4.1) может быть задано требование целочисленности всех или нескольких переменных. Кроме того, множество $G_x$ может быть задано в виде решения некоторых уравнений и т. д. Однако форма (4.1) наиболее употребительна и удобна, ею мы и будем пользоваться.

***Математическое программирование*** представляет собой математическую дисциплину, занимающуюся изучением экстремальных задач

(задач оптимизации / синтеза)

и разработкой **методов их решения**

Задачу математического программирования удобно записать в векторной форме. Для этого совокупность $\{x_1, \ldots, x_n\}$ заменяется вектором $\vec{x}=[x_1, \ldots, x_n]^{\text{т}}$. Тогда задача записывается так:

$$\Phi(\vec{x}) \Rightarrow \min_{\vec{x} \in G_x} (\max),$$

где $G_x = \{\vec{x}\colon\ g_i(\vec{x}) * b_i,\ i=\overline{1,\ m}\}$,

В рассматриваемых задачах множество $G_x$ допустимых векторов $\vec{x}$ называют **областью допустимых решений**, а функцию $\Phi(\vec{x})$ — **целевой**.

При рассмотрении задач математического программирования можно ограничиться случаем $\Phi(\vec{x}) \Rightarrow \min$. Действительно, если имеется задача $\Phi(\vec{x}) \Rightarrow \max$, то, меняя знак целевой функции, получаем

$$\Phi_1(\vec{x}) = -\Phi(\vec{x}), \quad \Phi_1(\vec{x}) \Rightarrow \min.$$

# *Что такое «биргетит» ?*

$$\Phi(\overrightarrow{x}) \Rightarrow \sup_{\vec{x}\in G_x} (\inf)$$

$$G_x = \left\{\vec{x} : g_i(\vec{x}) * b_i,\ i = \overline{1,m}\right\} \Big| \exists i^* \rightarrow (* \sim <) \vee (* \sim >)$$

*sup – supremum,   inf - infimum*

**п. 1.3 Постановка задачи** Пусть требуется спроектировать контейнер в форме прямоугольного параллелепипеда объемом $V = 1$ м$^3$, причем желательно израсходовать на его изготовление как можно меньше материала.

При постоянной толщине стенок последнее условие означает, что площадь полной поверхности контейнера должна быть минимальной. Если обозначить через $x_1$, $x_2$, $x_3$ длины ребер контейнера, то задача сведется к минимизации функции

$$S = 2(x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3).$$

Эта функция в данном случае является целевой, а условие $V = 1$ — ограничением-равенством, которое позволяет исключить один параметр:

$$V = x_1x_2x_3 = 1, \quad x_3 = \frac{1}{x_1x_2},$$

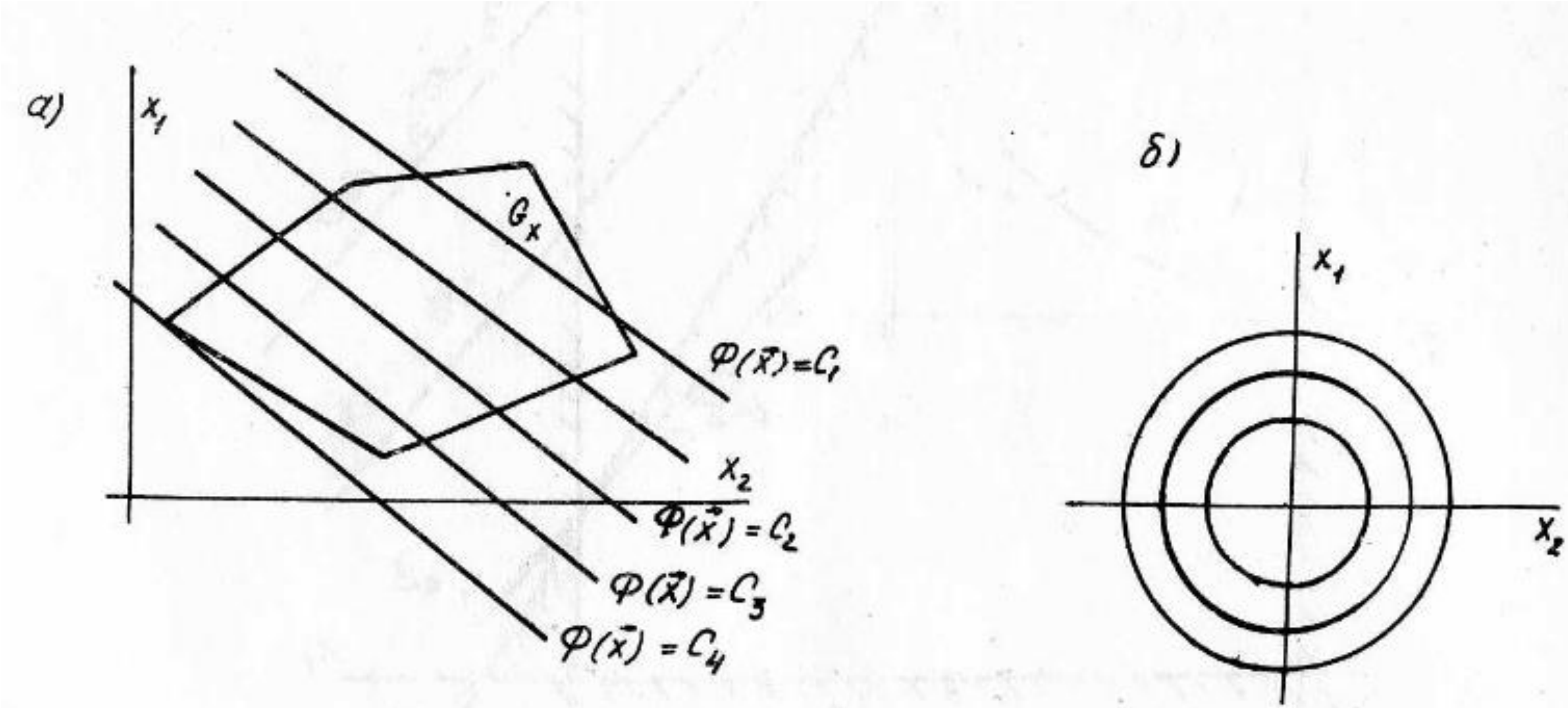
$$S = 2\left(x_1x_2 + \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}\right). \tag{6.4}$$

Задача свелась к минимизации функции двух переменных. В результате решения задачи будут найдены значения проектных параметров $x_1$, $x_2$, а затем и $x_3$. В приведенном примере фактически получилась задача безусловной оптимизации для целевой функции (6.4), поскольку ограничение-равенство было использовано для исключения параметра $x_3$.

## *Типовые задачи оптимизации, решаемые методами математического программирования*

- Линейное программирование
- Нелинейное программирование
- Динамическое программирование
- Целочисленное программирование
- Стохастическое программирование
- Задачи многокритериальной оптимизации
- Теоретико-игровые задачи
- и др.

## Графическое представление функций двух переменных в виде линий равного уровня (изолиний)



# <u>Вопрос 2</u>

# Нелинейное программирование. Методы решения одномерных и многомерных задач без ограничений и с ограничениями.

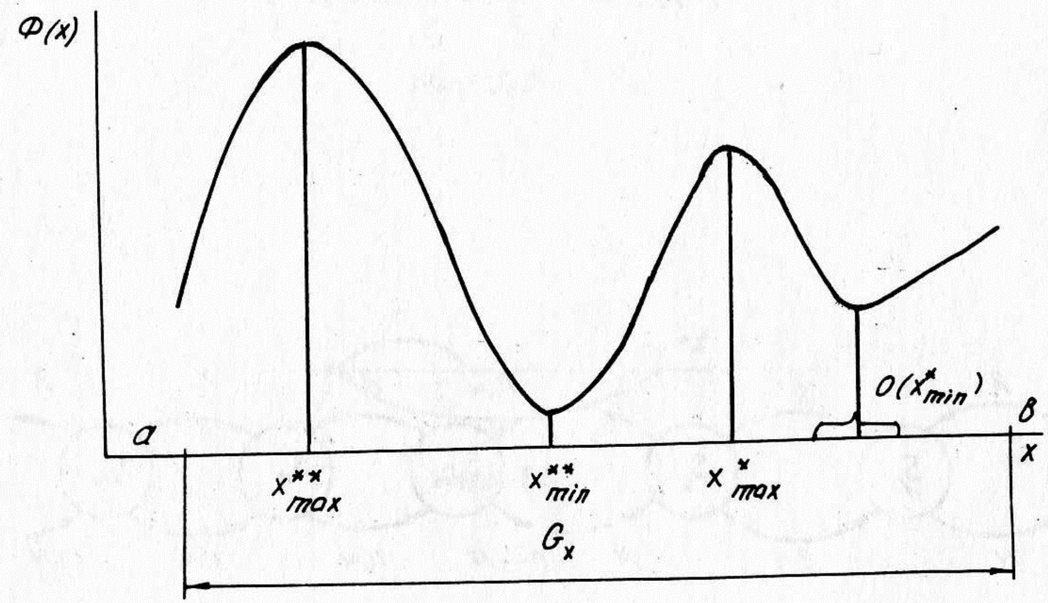
## п.2.1 Одномерная оптимизация

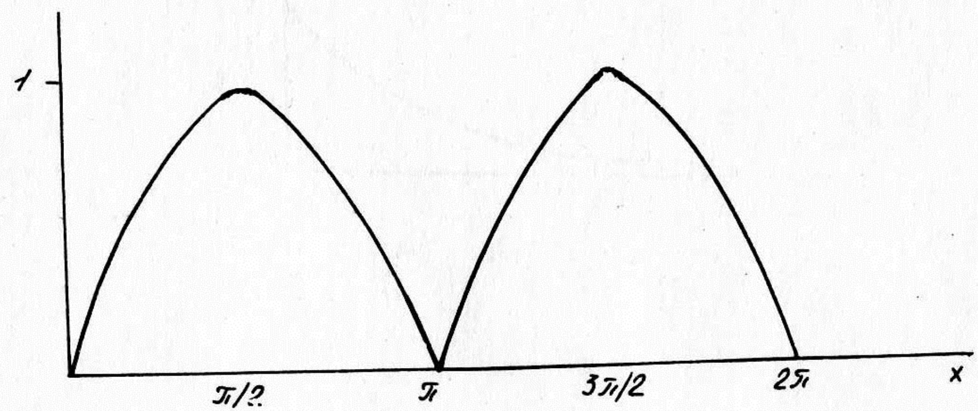
**1. Задачи на экстремум.** *Одномерная задача оптимизации* в общем случае формулируется следующим образом. Найти наименьшее (или наибольшее) значение целевой функции $y = f(x)$, заданной на множестве $\sigma$, и определить значение проектного параметра $x \in \sigma$, при котором целевая функция принимает экстремальное значение. Существование решения поставленной задачи вытекает из следующей теоремы.

***Теорема Вейерштрасса*** *Всякая функция $f(x)$, непрерывная на отрезке $[a, b]$, принимает на этом отрезке наименьшее и наибольшее значения, т. е. на отрезке $[a, b]$ существуют такие точки $x_1$ и $x_2$, что для любого $x \in [a, b]$ имеют место неравенства*

$$f(x_1) \leqslant f(x) \leqslant f(x_2).$$

Функция $f(x)$ может достигать своего наименьшего и наибольшего значений либо в граничных точках отрезка $[a, b]$, либо в точках минимума и максимума. Последние точки обязательно должны быть критическими, т. е. производная $f'(x)$ в этих точках обращается в нуль, — это необходимое условие экстремума. Следовательно, для определения наименьшего или наибольшего значений функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ нужно вычислить ее значения во всех критических точках данного отрезка и в его граничных точках и сравнить полученные значения; наименьшее или наибольшее из них и будет искомым значением.


Φ(x)
a
B
x
$x^{**}_{max}$
$x^{**}_{min}$
$x^{*}_{max}$
$O(x^{*}_{min})$
$G_x$


1
π/2
π
3π/2
2π
x

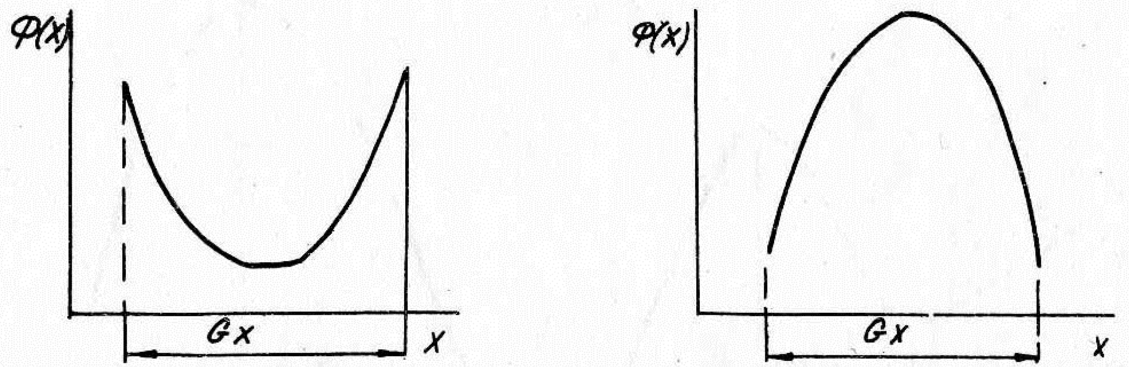



Рис. 4.7

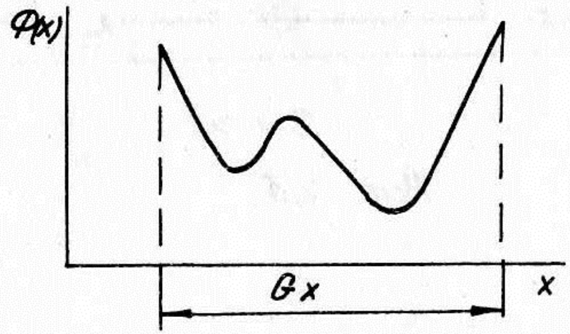



Рис. 4.8

**2. Методы поиска**

$$|x - x_*| < \varepsilon. \qquad (6.6)$$

*оптимальное значение x проектного параметра*

*приближенное значение к x*

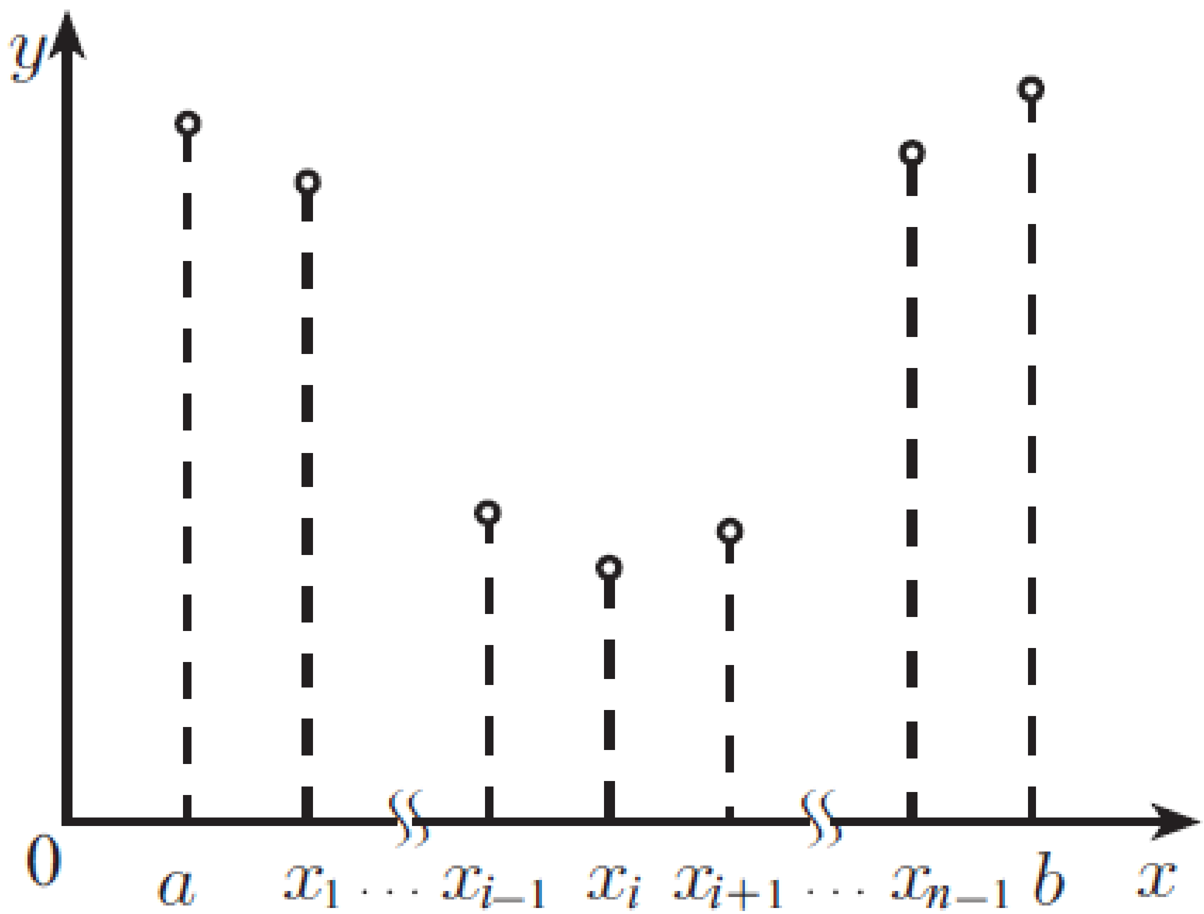
*погрешность*

Процесс решения задачи методом поиска состоит в последовательном сужении интервала изменения проектного параметра, называемого *интервалом неопределенности*. В начале процесса оптимизации его длина равна $b - a$, а к концу она должна стать меньше $\varepsilon$, т. е. оптимальное значение проектного параметра должно находиться в интервале неопределенности — отрезке $[x_n, x_{n+1}]$, причем $x_{n+1} - x_n < \varepsilon$. Тогда для выполнения (6.6) в качестве приближения к оптимальному значению можно принять любое $x_* \in [x_n, x_{n+1}]$, например, $x_* = x_n$ или $x_* = x_{n+1}$, или $x_* = (x_n + x_{n+1})/2$.

Наиболее простым способом сужения интервала неопределенности является деление его на некоторое число равных частей с последующим вычислением значений целевой функции в точках разбиения. Пусть $n$ — число элементарных отрезков, $h = (b - a)/n$ — шаг разбиения. Вычислим значения целевой функции $y_k = f(x_k)$ в узлах $x_k = a + kh$ $(k = 0, 1, \ldots, n)$. Сравнивая полученные значения $f(x_k)$, найдем среди них наименьшее $y_i = f(x_i)$.

*Более экономичным способом уточнения оптимального параметра является использование свойства* ***<u>унимодальности</u>*** *целевой функции, позволяющее построить процесс сужения интервала неопределенности*

**Иллюстрация метода поиска путем перебора значений искомой переменной**



## Примеры расчетов

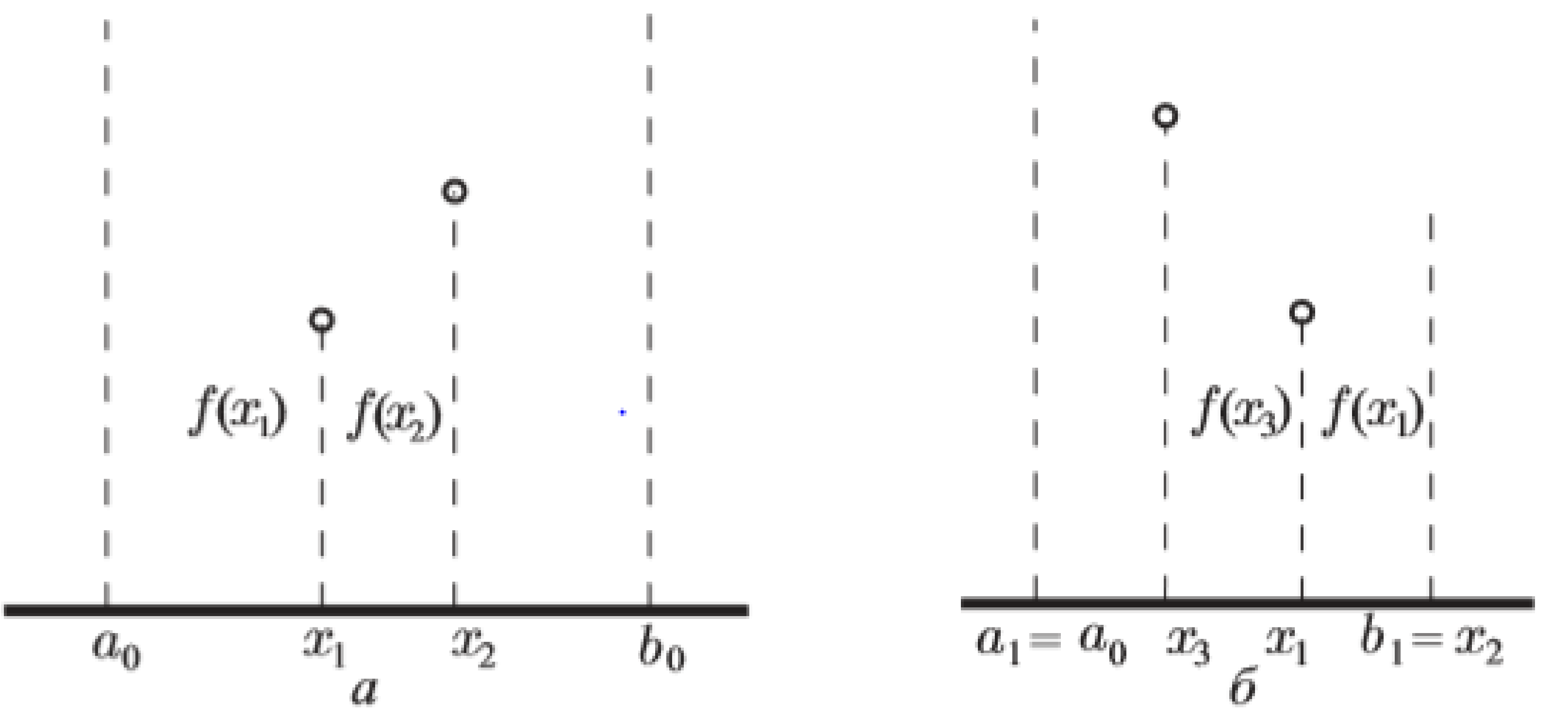
Например, пусть начальная длина интервала неопределенности равна $b - a = 1$. Нужно добиться его уменьшения в 100 раз. Этого легко достичь разбиением интервала на 200 частей. Вычислив значения целевой функции $f(x_k)$ $(k = 0, 1, \ldots, 200)$, найдем ее минимальное значение $f(x_i)$. Тогда искомым интервалом неопределенности будет отрезок $[x_{i-1}, x_{i+1}]$.

Однако можно поступить и иначе. Сначала разобьем отрезок $[a, b]$ на 20 частей и найдем интервал неопределенности длиной 0.1, при этом мы вычислим значения целевой функции в точках $x_k = a + 0.05k$ $(k = 0, 1, \ldots, 20)$. Теперь отрезок $[x_{i-1}, x_{i+1}]$ снова разобьем на 20 частей; получим искомый интервал длиной 0.01, причем значения целевой функции вычисляем в точках $x_k = x_{i-1} + 0.005k$ $(k = 1, 2, \ldots, 19)$ (в точках $x_{i-1}$ и $x_{i+1}$ значения $f(x)$ уже найдены). Таким образом, во втором случае в процессе оптимизации произведено 40 вычислений значений целевой функции против 201 в первом случае, т. е. способ разбиения позволяет получить существенную экономию вычислений.

Существует ряд специальных методов поиска оптимальных решений с разными способами выбора узлов и сужения интервала неопределенности: метод деления отрезка пополам, метод золотого сечения и др. Рассмотрим один из них.

# 3. Метод золотого сечения

Одним из наиболее эффективных методов, в которых при ограниченном количестве вычислений $f(x)$ достигается наилучшая точность, является *метод золотого сечения*. Он состоит в построении последовательности отрезков $[a_0, b_0], [a_1, b_1], \ldots$, стягивающихся к точке минимума функции $f(x)$. На каждом шаге, за исключением первого, вычисление значения функции $f(x)$ проводится лишь в одной точке. Эта точка, называемая *золотым сечением*, выбирается специальным образом.



Теперь рассмотрим способ размещения внутренних точек на каждом отрезке $[a_k, b_k]$. Пусть длина интервала неопределенности равна $l$, а точка деления разбивает его на части $l_1$, $l_2$: $l_1 > l_2$, $l = l_1 + l_2$. *Золотое сечение* интервала неопределенности выбирается так, чтобы отношение длины большего отрезка к длине всего интервала равнялось отношению длины меньшего отрезка к длине большего отрезка:

$$\frac{l_1}{l} = \frac{l_2}{l_1}\,. \tag{6.7}$$

Из этого соотношения можно найти точку деления, вычислив отношения

$$\alpha = \frac{l_1}{l}\,, \quad \beta = \frac{l_2}{l}\,.$$

Преобразуем выражение (6.7) и найдем значения $\alpha$, $\beta$:

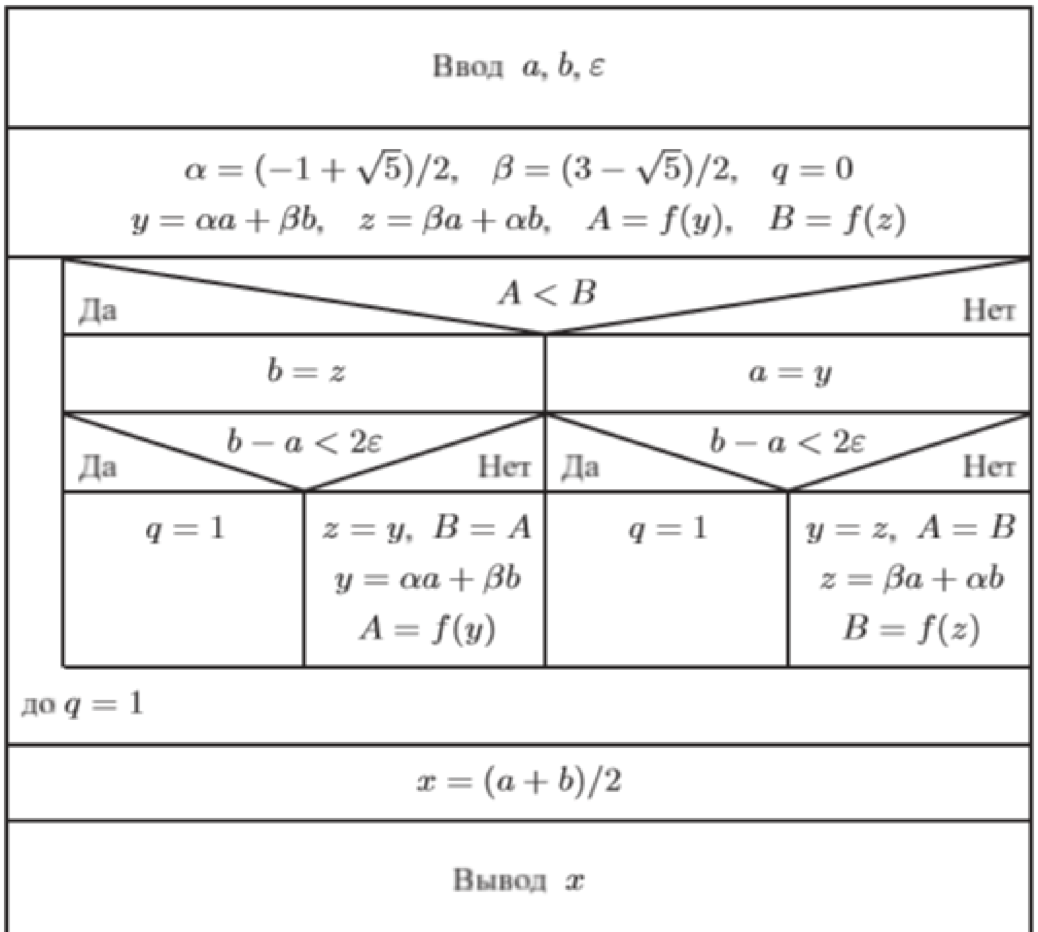
$$l_1^2 = l_2 l, \quad l_1^2 = l(l - l_1), \quad l_1^2 + l_1 l - l^2 = 0,$$

$$\left(\frac{l_1}{l}\right)^2 + \frac{l_1}{l} - 1 = 0, \quad \alpha^2 + \alpha - 1 = 0, \quad \alpha = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}\,.$$

Поскольку нас интересует только положительное решение, то

$$\alpha = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \approx 0.618, \quad \beta = 1 - \alpha = \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \approx 0.382.$$

На рисунке представлен алгоритм процесса одномерной оптимизации методом золотого сечения. Здесь $y$, $z$ — точки деления отрезка $[a, b]$, причем $y < z$. Переменная $q$ используется для выхода из цикла при выполнении неравенства (6.11), т. е. после достижения требуемой точности. В результате выполнения алгоритма выдается оптимальное значение проектного параметра $x$, в качестве которого принимается середина последнего интервала неопределенности.



**4. Метод Ньютона**

Как уже отмечалось выше, задачу оптимизации дифференцируемой функции $f(x)$ можно свести к нахождению критических точек этой функции, определяемых уравнением

$$f'(x) = 0 \tag{6.13}$$

Если данное уравнение нельзя решить аналитически, можно применить **численные методы**, например, ***метод Ньютона***.

Пусть $x = c$ — решение уравнения (6.13), а $c_0$ — некоторое начальное приближение к $c$. Применим для решения (6.13) метод Ньютона решения уравнения $F(x) = 0$, которое эквивалентно уравнению (6.13) при $F(x) = f'(x)$. Для этого в формулу для $k$-го приближения метода Ньютона (5.11)

$$c_k = c_{k-1} - F(c_{k-1})/F'(c_{k-1}), \quad k = 1, 2, \ldots \tag{5.11}$$

подставим вместо $F(x)$ производную $f'(x)$ и получим тем самым формулу для $k$-го приближения к решению уравнения (6.13):

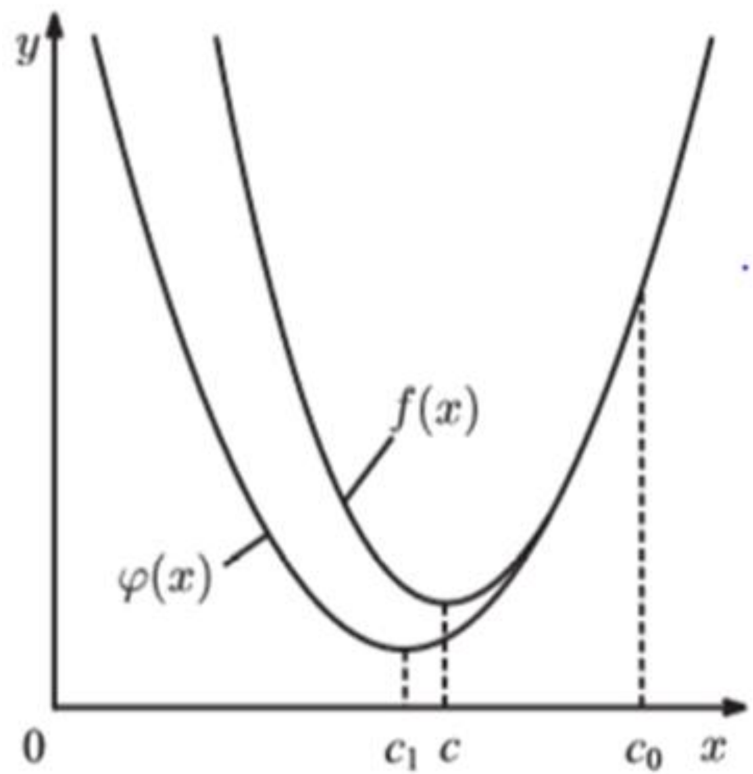
$$c_k = c_{k-1} - f'(c_{k-1})/f''(c_{k-1}), \quad k = 1, 2, \ldots \tag{6.14}$$

Для использования этой формулы необходимо, чтобы $f''(c_{k-1}) \neq 0$. В качестве критерия окончания итерационного процесса можно применять условия близости двух последовательных приближений

$$|c_k - c_{k-1}| < \varepsilon$$

или близости значений целевой функции на этих приближениях

$$|f(c_k) - f(c_{k-1})| < \varepsilon.$$




Метод Ньютона обладает более быстрой сходимостью (*на рисунке выше за 2 шага*) по сравнению с методами, которые не используют дифференциальные свойства функции (например, с методом золотого сечения). Однако сходимость метода Ньютона не гарантирована, при неудачном выборе начального приближения он может расходиться

## п.2.2 Многомерные задачи оптимизации

Минимум дифференцируемой функции многих переменных $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ можно найти, исследуя ее значения в критических точках, которые определяются из решения системы дифференциальных уравнений

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial x_2} = 0, \quad \ldots, \quad \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0. \qquad (6.16)$$

Во многих случаях никакой формулы для целевой функции нет, а имеется лишь возможность определения ее значений в произвольных точках рассматриваемой области с помощью некоторого вычислительного алгоритма или путем физических измерений. Задача состоит в приближенном определении наименьшего значения функции во всей области при известных ее значениях в отдельных точках.

Для решения подобной задачи в области проектирования $G$, в которой ищется минимум целевой функции $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, можно ввести дискретное множество точек (узлов) путем разбиения интервалов изменения параметров $x_1, x_2, \ldots, x_n$ на части с шагами $h_1, h_2, \ldots, h_n$. В полученных узлах можно вычислить значения целевой функции и среди этих значений найти наименьшее.

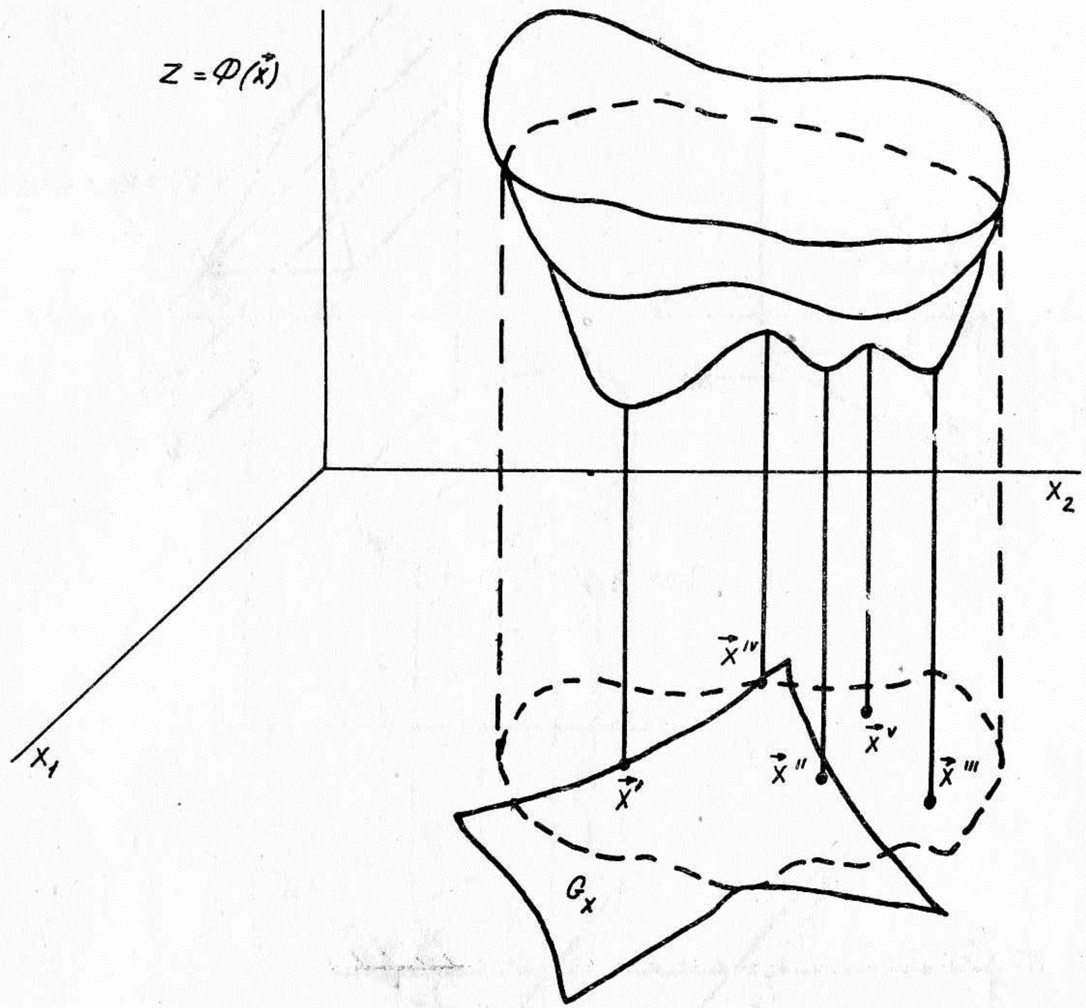
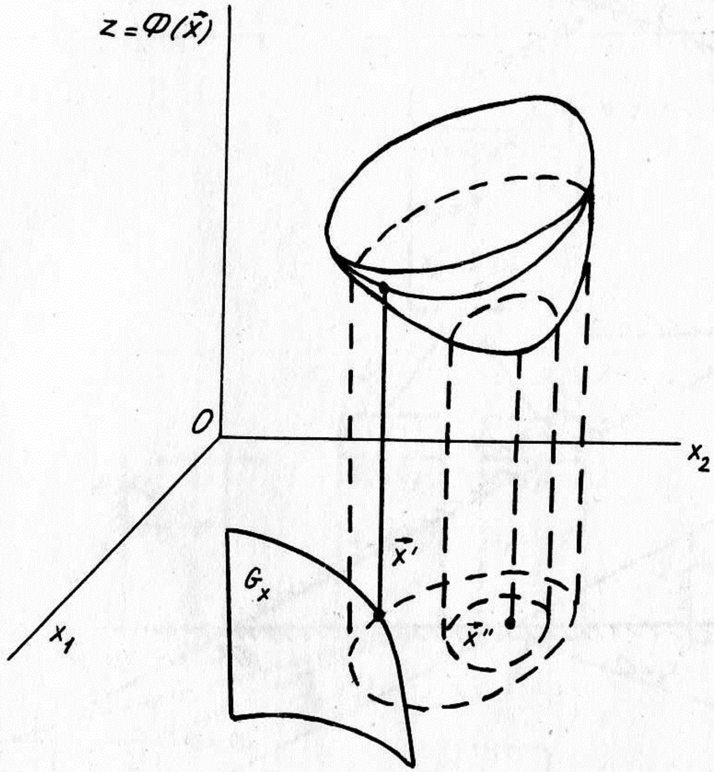
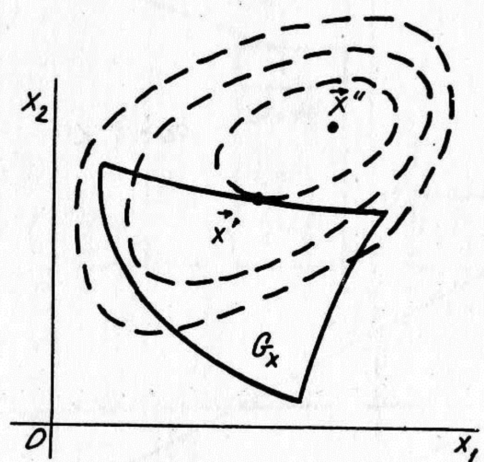



Рис. 4.9


$z = \varPhi(\vec{x})$
0
$x_2$
$x_1$
$\vec{x}'$
$G_x$
$\vec{x}''$

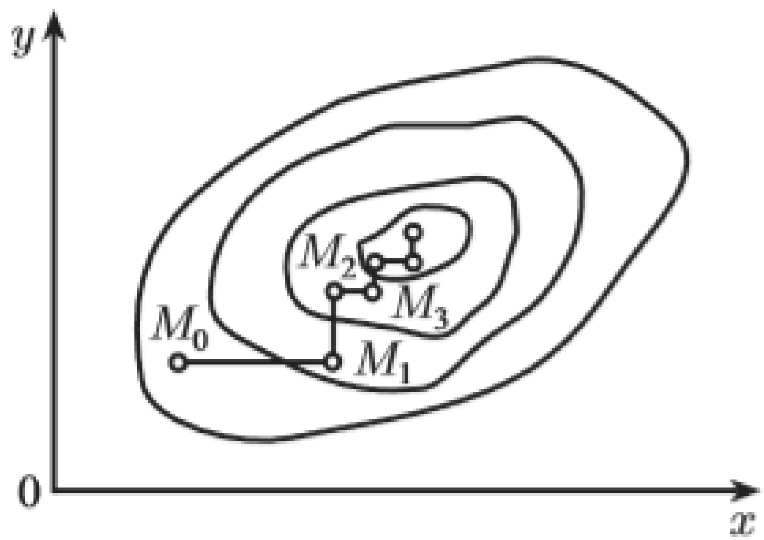

$x_2$
$\vec{x}''$
$\vec{x}'$
$G_x$
0
$x_1$

**2. Метод покоординатного спуска.** Пусть требуется найти наименьшее значение целевой функции $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. В качестве начального приближения выберем в $n-$мерном пространстве некоторую точку $M_0$ с координатами $x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}$. Зафиксируем все координаты функции $u$, кроме первой. Тогда $v(x_1) = f\big(x_1, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}\big)$ — функция одной переменной $x_1$. Первый шаг процесса оптимизации состоит в спуске по координате $x_1$ в направлении убывания функции $v$ от точки $M_0$ до некоторой точки $M_1\big(x_1^{(1)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}\big)$. Если функция $f$ дифференцируемая, то значение $x_1^{(1)}$ может быть найдено как

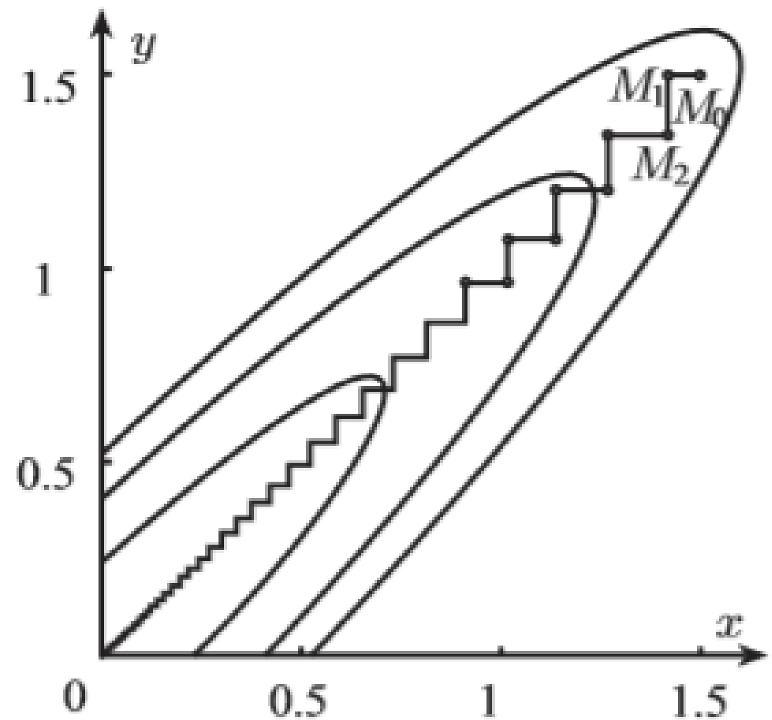
$$x_1^{(1)} = x_1^{(0)} - \alpha_1^{(1)} \frac{\partial f}{\partial x_1}(M_0). \tag{6.17}$$

Здесь $\alpha_1^{(1)} > 0$ — некоторый шаг. Соотношение (6.17) определяет движение в сторону уменьшения значений функции $v$ (если только шаг $\alpha_1^{(1)}$ не слишком велик, в противном случае его нужно уменьшить). Действительно, пусть $\partial f/\partial x_1(M_0) > 0$. Тогда с ростом $x_1$ функция $v$ возрастает, а (6.17) определяет движение в сторону уменьшения $x_1$.

Для функции двух переменных очевидно, что метод может оказаться неприменимым при наличии изломов в линиях уровня. Для гладких функций при удачно выбранном начальном приближении (в некоторой окрестности минимума) процесс сходится к минимуму. Здесь однако применение метода затруднено в случае так называемых *оврагов* на поверхности.




**Спуск по координатам**




**Овраг на поверхности**

**Метод градиентного спуска.**

Направление наибольшего возрастания функции двух переменных u = ***f (x,y)*** характеризуется ее ***градиентом.***

$$\operatorname{grad} u = \frac{\partial u}{\partial x} e_1 + \frac{\partial u}{\partial y} e_2,$$

где $e_1, e_2$ — единичные векторы (орты) в направлении координатных осей. Следовательно, направление, противоположное градиентному, укажет направление наибольшего убывания функции. Методы, основанные на выборе пути оптимизации с помощью градиента, называются *градиентными*.

Идея метода градиентного спуска состоит в следующем. Выбираем некоторую начальную точку $M_0(\mathbf{x}^{(0)}), \mathbf{x}^{(0)} = \{x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}\}$, и вычисляем в ней градиент рассматриваемой функции. Делаем шаг в направлении, обратном градиентному:

$$\mathbf{x}^{(1)} = \mathbf{x}^{(0)} - \alpha^{(1)} \operatorname{grad} f(M_0).$$

В результате приходим в точку $M_1\left(\mathbf{x}^{(1)}\right)$, значение функции в которой обычно меньше первоначального ($\alpha^{(1)}>0$). Если это условие не выполнено, т. е. значение функции не изменилось либо даже возросло, то нужно уменьшить шаг $\alpha^{(1)}$. В новой точке процедуру повторяем: вычисляем градиент и снова делаем шаг в обратном к нему направлении:

$$\mathbf{x}^{(2)}=\mathbf{x}^{(1)}-\alpha^{(2)}\operatorname{grad} f(M_1).$$

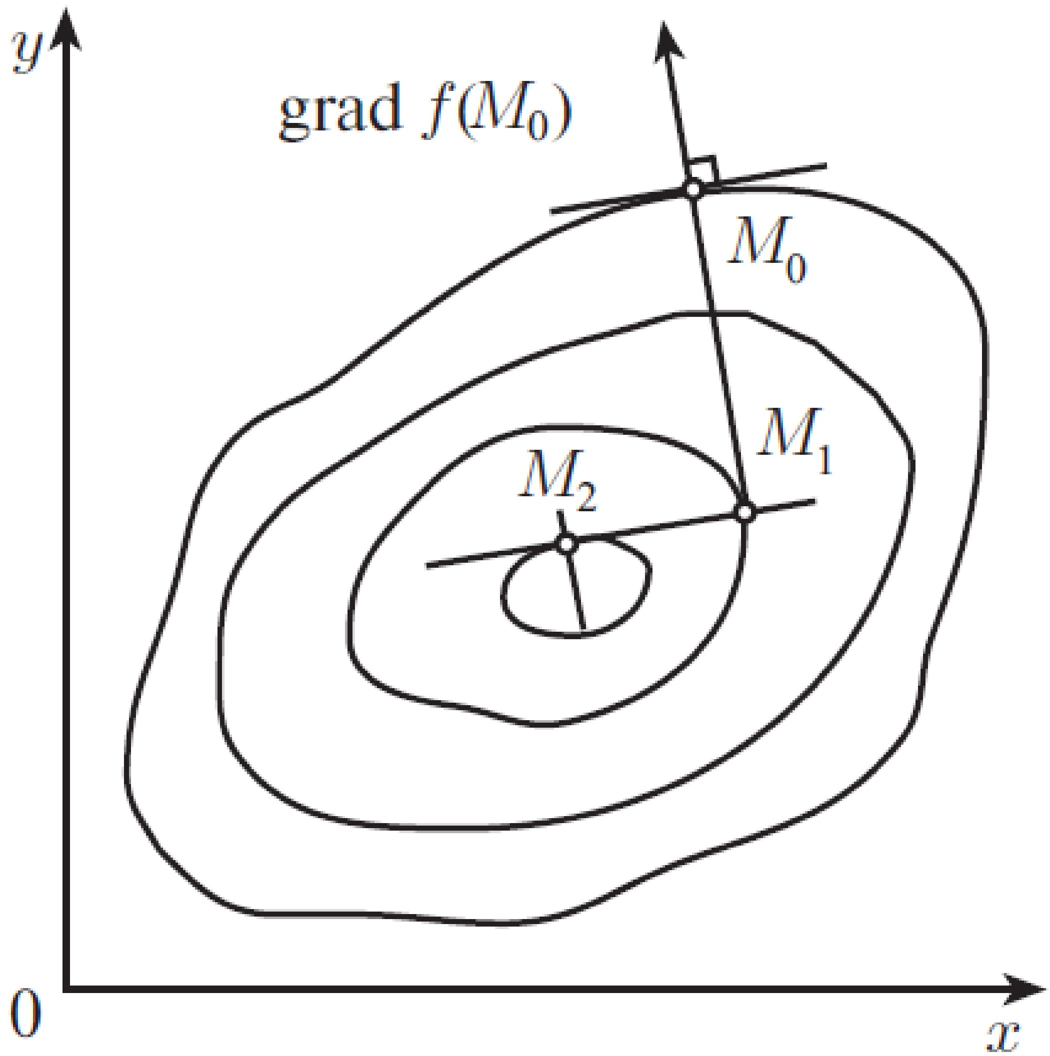
Процесс продолжается до получения наименьшего значения целевой функции. Строго говоря, момент окончания поиска наступит тогда, когда движение из полученной точки с любым шагом приводит к возрастанию значения целевой функции. Если минимум функции достигается внутри рассматриваемой области, то в этой точке градиент равен нулю, что также может служить сигналом об окончании процесса оптимизации. Приближенно момент окончания поиска можно определить аналогично тому, как это делается в других итерационных методах. Например, можно проверить близость значений целевой функции на двух последовательных итерациях:

$$\left|f\left(\mathbf{x}^{(k)}\right)-f\left(\mathbf{x}^{(k-1)}\right)\right|<\varepsilon.$$

Градиентный метод имеет несколько модификаций, отличающихся способом выбора шага $\alpha_k$. Если шаг выбирается по способу 2 решения задачи одномерной минимизации, то подобный вариант называют **методом наискорейшего спуска**.

Градиентный метод привлекателен своей простотой и возможностью применения для минимизации широкого класса функций. Если целевая функция строго выпукла, а шаг выбирается по способу 2, то итерационный процесс сходится со скоростью геометрической прогрессии из любого начального приближения $\vec{x}^{(0)}$.

Особенно существенно удается уменьшать значения целевой функции при движении из точек, расположенных вдали от точек минимума. В окрестности же такой точки метод «работает» плохо: скорость сходимости оказывается недопустимо низкой из-за пологого характера целевой функции в области, где градиент становится очень малым.




Метод наискорейшего спуска

**Обобщенный метод Ньютона.** При этом методе целевая функция в окрестности точки $\vec{x}^{(k)}$ аппроксимируется тремя членами ряда Тейлора:

$$\Phi(\vec{x}) \simeq \Phi(\vec{x}^{(k)}) + (\nabla\Phi(\vec{x}^{(k)}), (\vec{x} - \vec{x}^{(k)}) + \\ + 0,5(\nabla^2\Phi(\vec{x}^{(k)})(\vec{x} - \vec{x}^{(k)}), (\vec{x} - \vec{x}^{(k)})).$$

Условием применимости метода является дважды непрерывно дифференцируемость $\Phi(\vec{x})$, т. е. существование матрицы Гессе $\nabla^2\Phi(\vec{x})$.

При обобщенном методе Ньютона скорость сходимости существенно выше, чем при градиентном. Так, квадратичную функцию он минимизирует за один шаг. Для строго выпуклых функций итерационный процесс сходится из любого начального приближения $\vec{x}^0$ со сверхлинейной скоростью, а при некоторых не слишком обременительных дополнительных условиях — с квадратичной. Метод обеспечивает высокую скорость сходимости и для произвольных функций. Особенно эффективно его применение в окрестности оптимума, где аппроксимация (4.29) является весьма точной для многих функций. В этом случае можно получить решение с высокой точностью всего за несколько итераций.

Применение обобщенного метода Ньютона не лишено и недостатков: большой объем вычислений на каждой итерации; трудность получения аналитических выражений вторых производных, необходимых для обеспечения нужной точности вычислений.

## п.2.3. Задачи с ограничениями.

Одним из направлений в методах решения задач математического программирования является сведение их к последовательности задач ***безусловной минимизации.***

К этому методу в частности относится ***метод штрафных функций.***

Сущность метода состоит в следующем. Пусть $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — целевая функция, для которой нужно найти минимум $m$ в ограниченной области $D$, $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in D$. Данную задачу заменяем задачей о безусловной минимизации однопараметрического семейства функций

$$F(\mathbf{x}, \beta) = f(\mathbf{x}) + \frac{1}{\beta}\varphi(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}.$$

При этом дополнительную (*штрафную*) функцию $\varphi(\mathbf{x})$ выберем таким образом, чтобы при $\beta \to 0$ решение вспомогательной задачи стремилось к решению исходной или, по крайней мере, чтобы их минимумы совпадали: $\min F(\mathbf{x}, \beta) \to m$ при $\beta \to 0$.

Штрафная функция $\varphi(\mathbf{x})$ должна учитывать ограничения, которые задаются при постановке задачи оптимизации. В частности, если имеются ограничения-неравенства вида $h_j(x_1, x_2, \ldots, x_n) \geqslant 0$ $(j = 1, 2, \ldots, J)$, то в качестве штрафной можно взять функцию, которая:

1) равна нулю во всех точках пространства проектирования, удовлетворяющих заданным ограничениям-неравенствам;

2) стремится к бесконечности в тех точках, в которых эти неравенства не выполняются.

Таким образом, при выполнении ограничений-неравенств функции $f(\mathbf{x})$ и $F(\mathbf{x}, \beta)$ имеют один и тот же минимум. Если хотя бы одно неравенство не выполнится, то вспомогательная целевая функция $F(\mathbf{x}, \beta)$ получает бесконечно большие добавки, и ее значения далеки от минимума функции $f(\mathbf{x})$. Другими словами, при несоблюдении ограничений-неравенств налагается «штраф». Отсюда и термин «метод штрафных функций».

Алгоритм решения задачи математического программирования с использованием метода штрафных функций представлен в укрупненном виде на рис. 6.9. В качестве исходных данных вводятся начальное приближение искомого вектора $\mathbf{x}^*=\{x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*\}$, начальное значение параметра $\beta$ и некоторое малое число $\varepsilon > 0$, характеризующее точность расчета. На каждом шаге итерационного процесса определяется оптимальное значение $\mathbf{x}^*$ вектора $\mathbf{x}$, при этом в качестве начального приближения принимается результат предыдущей итерации. Значения параметра $\beta$ каждый раз уменьшаются до тех пор, пока значение штрафной функции не станет меньше заданной малой величины. В этом случае точка $\mathbf{x}^*$ достаточно близка к границе области $D$ и с необходимой точностью описывает оптимальные значения проектных параметров. Если точка минимума находится внутри области $D$, то искомый результат будет получен сразу после первого шага, поскольку в данном случае $\varphi(\mathbf{x}^*) = 0$.


Рис. 6.9. Метод штрафных функций

# Другие методы решения нелинейных задач условной оптимизации

В классе нелинейных условных оптимизационных задач наиболее развиты методы решения задач выпуклого программирования.

Пусть $\Phi(\vec{x})$ и $g_i(\vec{x})$, $i=\overline{1, m}$ — гладкие выпуклые функции. Требуется при ограничениях

$$g_i(\vec{x}) \leqslant 0, \qquad i=\overline{1, m}$$

найти $\vec{x}=\vec{x}^*$, при котором $\Phi(\vec{x}) \Rightarrow \min$. Для задач такого типа имеет место следующая теорема Куна — Таккера, которую мы приведем без доказательства.

**Теорема 4.** Для того чтобы точка $\vec{x}^*$ была точкой минимума функции $\Phi(\vec{x})$ на множестве $G_x$, определенном неравенствами $g_i(\vec{x}) \leqslant 0$ и содержащем внутренние точки, необходимо и достаточно существование чисел $u_1^* \geqslant 0, \ldots, u_m^* \geqslant 0$ таких, что

$$\nabla\Phi(\vec{x}^*) + \sum_{i=1}^{m} u_i^* \, \Delta g_i(\vec{x}^*) = 0;$$

$$u_i^* g_i(\vec{x}^*) = 0, \qquad i=\overline{1, m}.$$

**Метод множителей Лагранжа.** Теорема Куна — Таккера не применима для задач, в которых ограничения имеют вид равенств $g_i(\vec{x})=0$, $i=\overline{1,m}$. Если функции $g_i(\vec{x})$ нелинейные, то задача перестает быть выпуклой. В этом случае можно применить метод множителей Лагранжа, позволяющий обнаружить точки, подозрительные на экстремум. Существо метода состоит в следующем.

Введем так называемую функцию Лагранжа

$$L(\vec{x},\ \vec{u})=\Phi(\vec{x})+\sum_{i=1}^{m}u_i g_i(\vec{x}),$$

где $u_i$ — неопределенные множители Лагранжа.

Вычислим частные производные от $L(\vec{x},\ \vec{u})$ по компонентам векторов $\vec{x}$ и $\vec{u}$. Получим следующую систему уравнений, напоминающую систему (4.32):

$$\frac{\partial L(\vec{x},\ \vec{u})}{\partial x_j}=\frac{\partial\Phi(\vec{x})}{\partial x_j}+\sum_{i=1}^{m}u_i\frac{\partial g_i(\vec{x})}{\partial x_j}=0,\quad j=\overline{1,\ n};$$
$$\frac{\partial L(\vec{x},\ \vec{u})}{\partial u_i}=g_i(\vec{x})=0,\quad i=\overline{1,\ m}. \tag{4.34}$$

В рассматриваемой задаче функции $\Phi(\vec{x})$ и $g_i(\vec{x})$ могут быть произвольными (не обязательно выпуклыми), но гладкими.

В результате решения системы (4.34) определяется совокупность решений $\vec{x}^{(1)*}$, $\vec{x}^{(2)*}$ и т. д. (их может быть несколько), дополнительная проверка функции $\Phi(\vec{x})$ в которых позволяет установить оптимальное.

**Метод возможных направлений.** Он предназначен для решения задач нелинейного программирования общего вида с гладкими функциями цели и ограничений. Метод основан на линейной аппроксимации целевой функции $\Phi(\vec{x})$ и функций ограничений $g_i(\vec{x})$ в окрестности каждой точки $\vec{x}^{(k)}$ итерационного процесса. Линейная аппроксимация позволяет определить вектор направления $\vec{p}^{(k)}$ путем решения вспомогательной задачи линейного программирования. Этот вектор, уже не совпадающий с антиградиентом, указывает направление, при движении в котором целевая функция уменьшается наиболее быстро и при разумной величине шага обеспечивается сохранение $\vec{x}^{(k)}$ в допустимой области $G_x$.

# Вопрос 3.
# Линейное программирование. Геометрический и симплекс-метод

**п.3.1. Линейное программирование**

Линейное программирование изучает задачи оптимизации, в которых, целевая функция является линейной функцией проектных параметров, а ограничения задаются в виде линейных уравнений и неравенств.

Стандартная (каноническая) постановка задачи линейного программирования формулируется следующим образом: найти значения переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, которые:

1) удовлетворяют системе линейных уравнений

$$\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m; \end{array} \qquad (6.21)$$

2) являются неотрицательными, т. е.

$$x_1 \geqslant 0, \quad x_2 \geqslant 0, \ \ldots, \ x_n \geqslant 0; \qquad (6.22)$$

3) обеспечивают наименьшее значение линейной целевой функции

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = c_0 + c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n. \qquad (6.23)$$

Всякое решение системы уравнений (6.21), удовлетворяющее системе неравенств (6.22), называется *допустимым решением*. Допустимое решение, которое минимизирует целевую функцию (6.23), называется *оптимальным решением*.

При ограничениях

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j * b_i, \qquad i = \overline{1,\ m}$$

найти минимум целевой функции

$$\Phi(\overrightarrow{x}) = \sum_{j=1}^{n} C_j x_j.$$

**п.3.2 Геометрический метод.** Областью решения линейного неравенства с двумя переменными

$$a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 \geqslant 0 \qquad (6.31)$$

является полуплоскость. Для того чтобы определить, какая из двух полуплоскостей соответствует этому неравенству, нужно привести его к виду $x_2 \geqslant kx_1 + b$ или $x_2 \leqslant kx_1 + b$. Тогда искомая полуплоскость в первом случае расположена выше прямой $a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 = 0$, во втором — ниже нее. Если $a_2 = 0$, то неравенство (6.31) имеет вид $a_0 + a_1x_1 \geqslant 0$; в этом случае получим либо $x \geqslant h$ — правую полуплоскость, либо $x \leqslant h$ — левую полуплоскость.

*Областью решений* системы неравенств является пересечение конечного числа полуплоскостей, описываемых каждым отдельным неравенством вида (6.31). Это пересечение представляет собой многоугольную область $G$. Она может быть как ограниченной, так и неограниченной и даже пустой (если система неравенств противоречива).

Область решений $G$ обладает важным свойством выпуклости. Область называется *выпуклой*, если произвольные две ее точки можно соединить отрезком, целиком принадлежащим данной области.

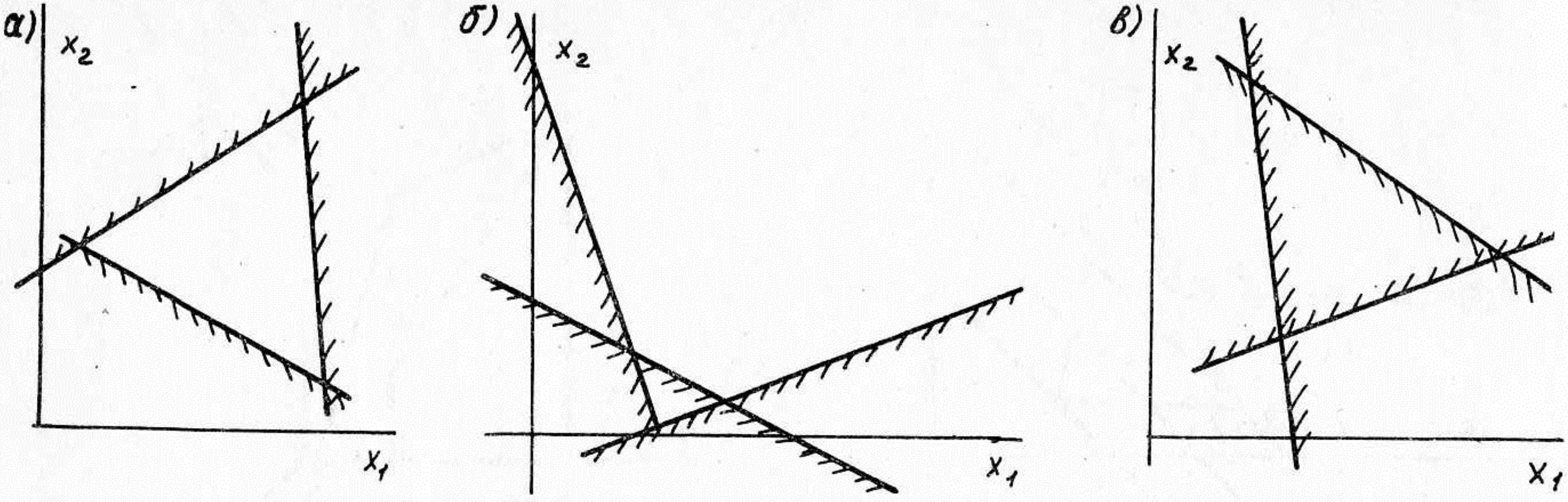



Рис. 4.14

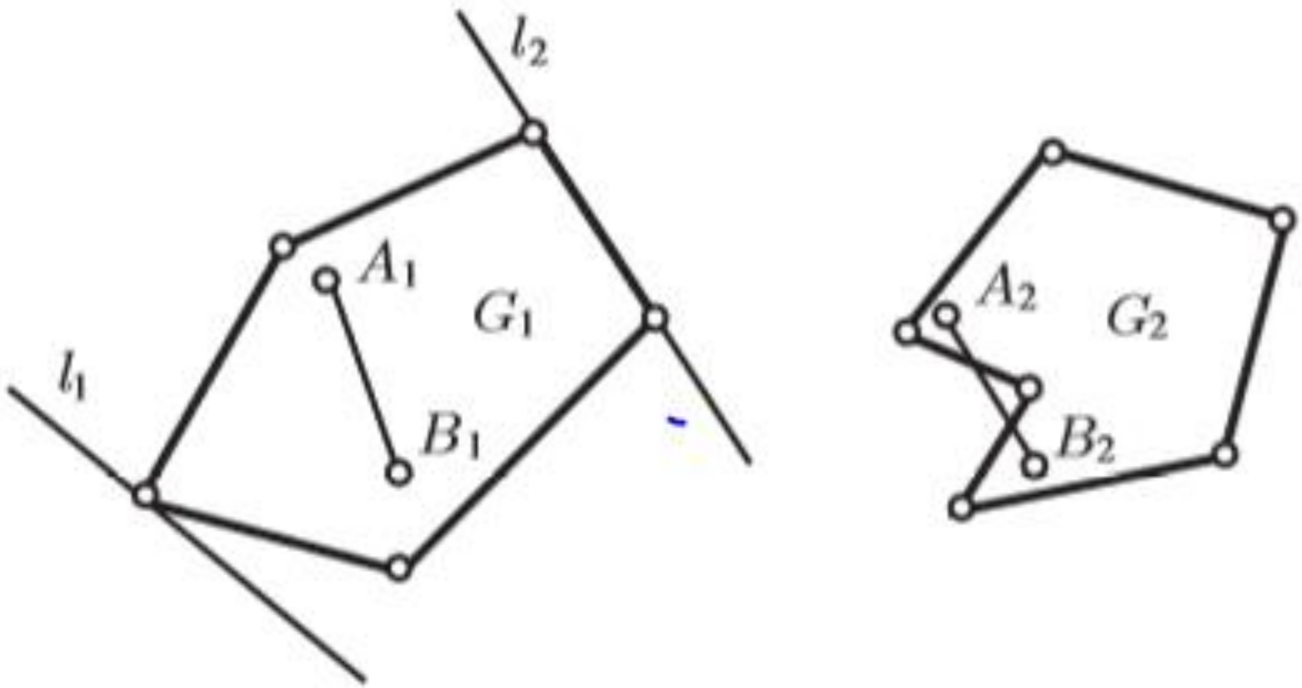



Рис. 6.11. Выпуклая ($G_1$) и невыпуклая ($G_2$) области

Пусть заданы линейная целевая функция $f = c_0 + c_1x_1 + c_2x_2$ двух независимых переменных, а также некоторая совместная система линейных неравенств, описывающих область решений $G$. Требуется среди допустимых решений $(x_1, x_2) \in G$ найти такое, при котором линейная целевая функция $f$ принимает наименьшее значение.

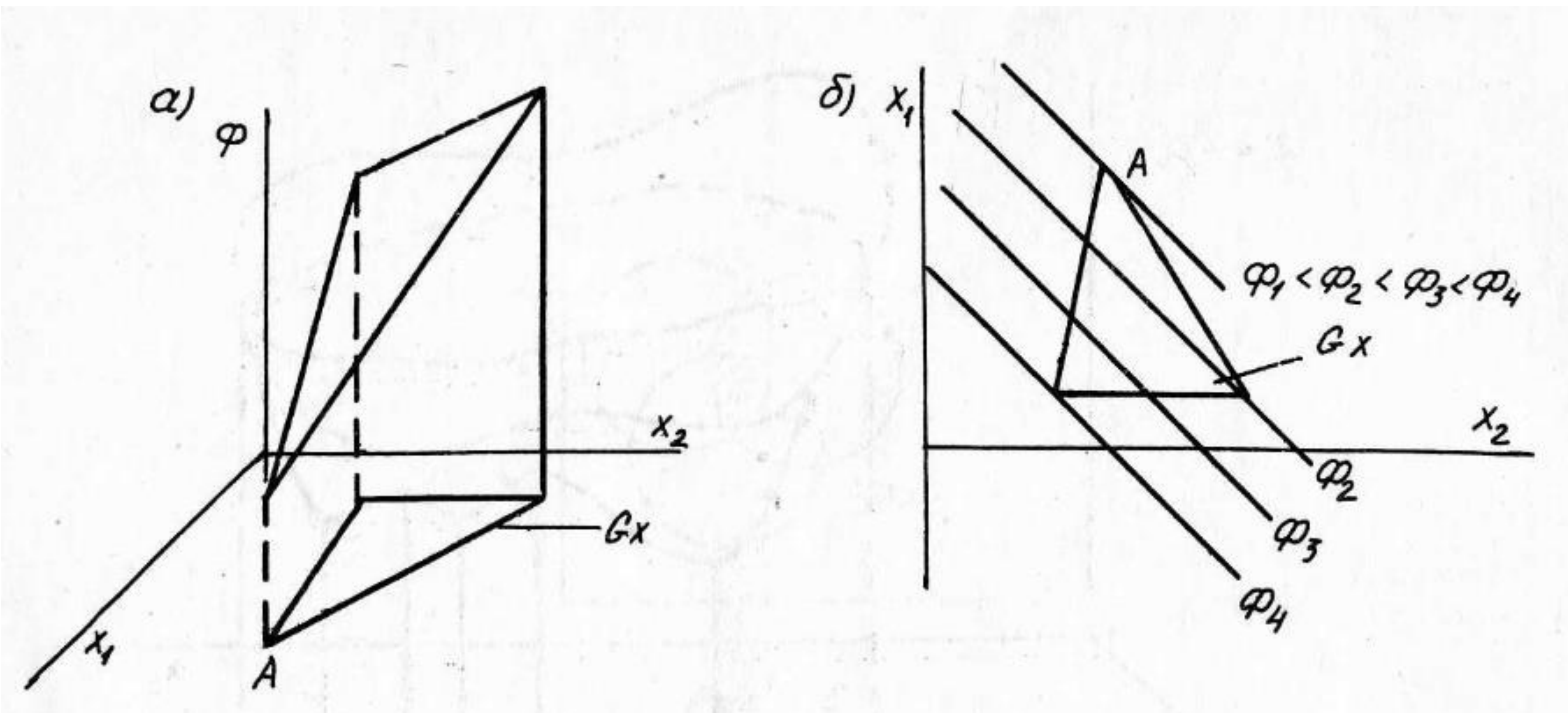
Положим функцию $f$ равной некоторому постоянному значению $C$: $f = c_0 + c_1x_1 + c_2x_2 = C$. Это значение достигается в точках прямой, удовлетворяющих уравнению

$$c_0 + c_1x_1 + c_2x_2 = C. \tag{6.32}$$

При параллельном переносе этой прямой в положительном направлении вектора нормали $\mathbf{n} = \{c_1, c_2\}$ линейная функция $f$ будет возрастать, а при переносе прямой в противоположном направлении — убывать.

Предположим, что прямая, записанная в виде (6.32), при параллельном переносе в положительном направлении вектора $\mathbf{n}$ первый раз встретится с областью допустимых решений $G$ в некоторой ее вершине, при этом значение целевой функции равно $C_1$, и прямая становится опорной. Тогда значение $C_1$ будет минимальным, поскольку дальнейшее движение прямой в том же направлении приведет к увеличению значения $f$.

**Графический метод**
**решения задачи линейного программирования**



Таким образом, оптимизация линейной целевой функции на многоугольнике допустимых решений происходит в точках пересечения этого многоугольника с опорными прямыми, соответствующими данной целевой функции. При этом пересечение может быть в одной точке (в вершине многоугольника) либо в бесконечном множестве точек (на ребре многоугольника). В последнем случае имеется бесконечное множество оптимальных решений.

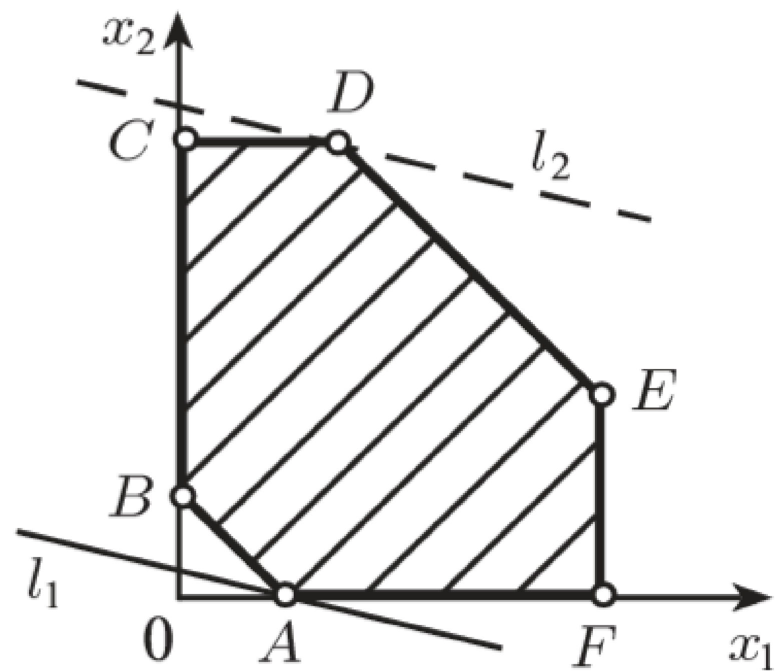


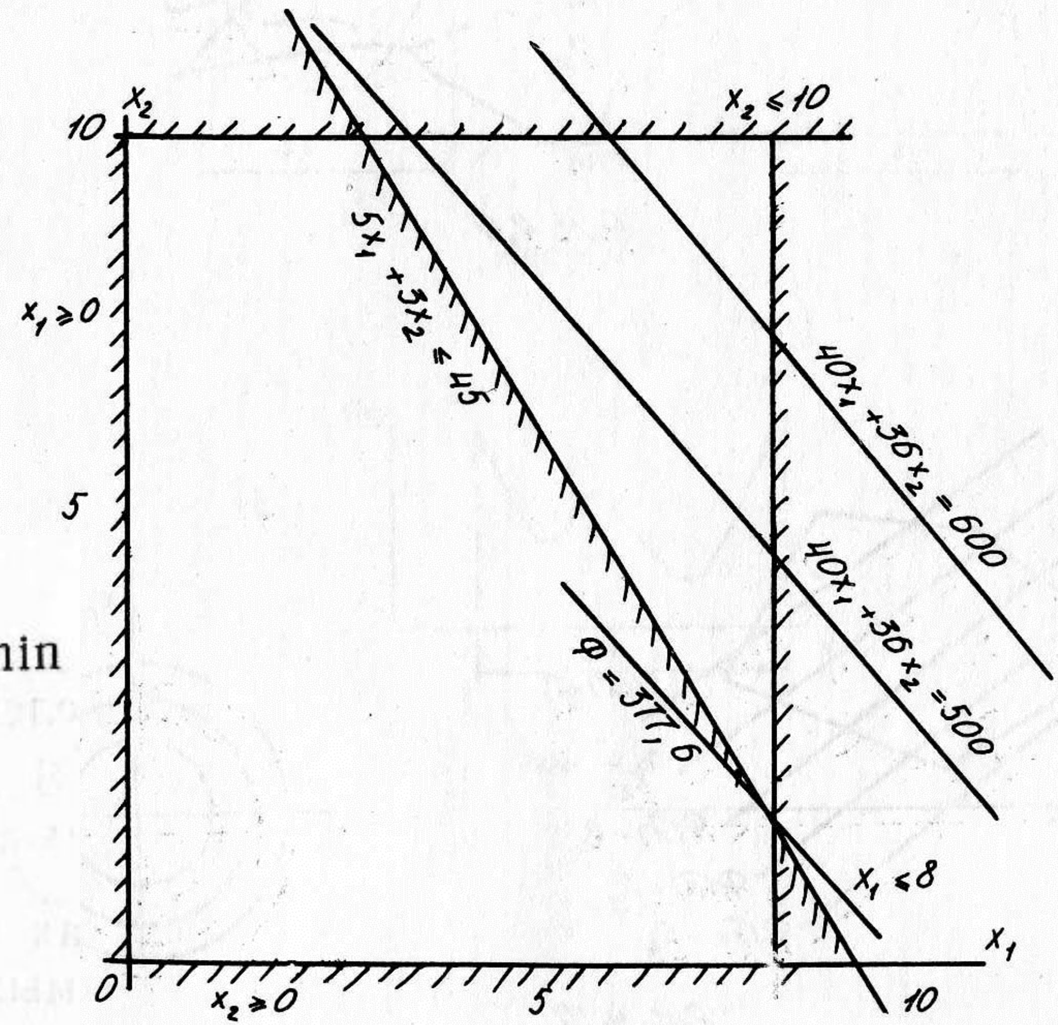

**Рис. 6.12 Область допустимых решений**

Рассмотрим задачу

$$\Phi(x_1, x_2) = 40x_1 + 36x_2 \Rightarrow \min$$

при ограничениях

$$5x_1 + 3x_2 \geqslant 45;$$
$$x_1 \leqslant 8;$$
$$x_2 \leqslant 10;$$
$$x_1 \geqslant 0, \quad x_2 \geqslant 0.$$



## п.3.3. Симплекс - метод

*Симплексом* называется простейший выпуклый многогранник при данном числе измерений. В частности, при $n = 2$ — произвольный треугольник, $n = 3$ — произвольный тетраэдр.

Идея *симплекс-метода* состоит в следующем. Примем в качестве начального приближения координаты некоторой вершины многогранника допустимых решений и найдем все ребра, выходящие из этой вершины. Двигаемся вдоль того ребра, по которому линейная целевая функция убывает. Приходим в новую вершину, находим все выходящие из нее ребра, двигаемся по одному из них и т. д. В конце концов мы придем в такую вершину, движение из которой вдоль любого ребра приведет к возрастанию целевой функции. Следовательно, минимум достигнут, и координаты этой последней вершины принимаются в качестве оптимальных значений рассматриваемых проектных параметров.

Итак, решение задачи ЛП можно разделить на два этапа:
— определение допустимого базисного решения;
— оценка его оптимальности и поэтапный переход к новым базисным решениям с монотонным улучшением целевой функции.

Пусть задача линейного программирования состоит в том, что нужно найти такие неотрицательные значения проектных параметров $x_1$, $x_2, \ldots, x_n$, которые минимизируют линейную целевую функцию

$$f = c_0 + c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n. \tag{6.33}$$

при заданных ограничениях в виде системы линейных уравнений

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \ldots & + & a_{1n}x_n & = & b_1, \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \ldots & + & a_{2n}x_n & = & b_2, \\ \multicolumn{9}{c}{\dotfill} \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \ldots & + & a_{mn}x_n & = & b_m. \end{array} \tag{6.34}$$

Выразим первые $m$ переменных $x_1, x_2, \ldots, x_m$ через остальные с помощью уравнений (6.34):

$$\begin{aligned} x_1 &= p_1 + q_{1,m+1}x_{m+1} + q_{1,m+2}x_{m+2} + \ldots + q_{1n}x_n, \\ x_2 &= p_2 + q_{2,m+1}x_{m+1} + q_{2,m+2}x_{m+2} + \ldots + q_{2n}x_n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_m &= p_m + q_{m,m+1}x_{m+1} + q_{m,m+2}x_{m+2} + \ldots + q_{mn}x_n. \end{aligned} \tag{6.35}$$

Здесь $p_i \geqslant 0$ $(i = 1, 2, \ldots m)$, поскольку при $x_{m+1} = x_{m+2} = \ldots = x_n = 0$ из (6.35) следует, что $x_i = p_i$, но $x_i \geqslant 0$.

Переменные $x_1, x_2, \ldots, x_m$ называются *базисными*, а вектор $\{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$ — *базисом*, $x_{m+1}, x_{m+2}, \ldots, x_n$ — *свободные* переменные.

Используя соотношения (6.35), можно выразить линейную целевую функцию (6.33) через свободные переменные:

$$f = d_0 + d_{m+1}x_{m+1} + d_{m+2}x_{m+2} + \ldots + d_n x_n. \tag{6.36}$$

Дальнейшее решение задачи симплекс-методом распадается на ряд этапов, заключающихся в том, что от одного решения нужно перейти к другому с таким условием, чтобы целевая функция не возрастала. Это достигается выбором нового базиса и значений свободных переменных.

Выясним, является ли опорное решение (6.37) оптимальным. Для этого проверим, можно ли уменьшить соответствующее этому решению значение целевой функции $f = d_0$ при изменении каждой свободной переменной. Поскольку $x_i \geqslant 0$, то мы можем лишь увеличивать их значения. Если коэффициенты $d_{m+1}, \ldots, d_n$ в формуле (6.36) неотрицательны, то при увеличении любой свободной переменной $x_{m+1}, \ldots, x_n$ целевая функция не может уменьшиться. В этом случае решение (6.37) окажется оптимальным.

Пусть теперь среди коэффициентов формулы (6.36) хотя бы один отрицательный, например $d_{m+1} < 0$. Это означает, что при увеличении переменной $x_{m+1}$ до некоторого значения $x_{m+1}^{(1)}$ целевая функция уменьшается по сравнению со значением $d_0$, соответствующим решению (6.37). Поэтому в качестве нового опорного выбирается решение при следующих значениях свободных параметров:

$$x_{m+1} = x_{m+1}^{(1)}, \quad x_{m+2} = 0, \ \ldots, \ x_n = 0.$$

При этом базисные переменные, вычисляемые по формулам (6.35), равны

$$x_i = p_i + q_{i,\,m+1} x_{m+1}^{(1)}, \quad i = 1, 2, \ldots, m. \tag{6.38}$$

Выясним теперь, как выбрать $x_{m+1}^{(1)}$. Если все коэффициенты $q_{i,m+1}$ неотрицательны, то $x_{m+1}$ можно увеличивать неограниченно; в этом случае не существует оптимального решения задачи. Однако на практике такие случаи, как правило, не встречаются. Обычно среди коэффициентов $q_{i,m+1}$ имеются отрицательные, а это влечет за собой угрозу сделать некоторые переменные $x_i$ в (6.38) отрицательными из-за большого значения $x_{m+1}^{(1)}$.

Среди всех отрицательных коэффициентов $q_{i,m+1}$ найдем такой, для которого отношение $p_i/q_{i,m+1}$ является наименьшим по модулю. Пусть это элемент $q_{j,m+1}$. Обозначим его значение через $Q$, а соответствующее ему значение $p_j$ через $P$. Тогда из (6.39) получим максимально возможное значение переменной $x_{m+1}$ на данном шаге оптимизации: $x_{m+1}^{(1)} = -P/Q$ ($P > 0$, $Q < 0$), и новое опорное решение запишем в виде

$$
\begin{gathered}
x_i = p_i - \frac{P}{Q}\, q_{i,m+1}, \quad i = 1, \ldots, j-1, j+1, \ldots, m, \\
x_j = 0, \quad x_{m+1} = -\frac{P}{Q}, \quad x_{m+2} = 0, \quad \ldots, \quad x_n = 0.
\end{gathered}
\tag{6.40}
$$

Новая целевая функция при этих значениях проектных параметров равна

$$
f^{(1)} = d_0 - d_{m+1}\frac{P}{Q}\,.
$$

На этом заканчивается первый шаг оптимизации. Теперь нужно сделать второй шаг, используя аналогичную процедуру. Для этого необходимо выбрать новый базис, принимая в качестве базисных переменных параметры $x_1, \ldots, x_{j-1}, x_{j+1}, \ldots, x_{m+1}$. Переменные $x_j, x_{m+2}, \ldots, x_n$, принимающие нулевые значения, будут являться свободными. После второго шага мы либо найдем новые оптимальные значений переменных и соответствующее им значение целевой функции $f^{(2)} < f^{(1)}$, либо покажем, что решение (6.40) является оптимальным. В любом случае после конечного числа шагов мы придем к оптимальному решению. Еще раз подчеркнем, что в отличие от метода перебора симплекс-метод дает возможность вести поиск целенаправленно, уменьшая на каждом шаге значение целевой функции.

В качестве примера, иллюстрирующего симплекс-метод, рассмотрим задачу об использовании ресурсов.

**п.3.4** **Задача о ресурсах.** В распоряжении бригады имеются следующие ресурсы: 300 кг металла, 100 м$^2$ стекла, 160 чел.-ч. (человеко-часов) рабочего времени. Бригаде поручено изготовлять два наименования изделий: А и Б. Цена одного изделия А 1 тыс. р., для его изготовления необходимо 4 кг металла, 2 м$^2$ стекла и 2 чел.-ч. рабочего времени. Цена одного изделия Б 1.2 тыс. р., для его изготовления необходимо 5 кг металла, 1 м$^2$ стекла и 3 чел.-ч. рабочего времени. Требуется так спланировать объем выпуска продукции, чтобы ее стоимость была максимальной.

Сначала сформулируем задачу математически. Обозначим через $x_1$ и $x_2$ количество изделий А и Б, которое необходимо запланировать (т. е. это искомые величины). Имеющиеся ресурсы сырья и рабочего времени зададим в виде ограничений-неравенств:

$$\begin{aligned} 4x_1 + 5x_2 &\leqslant 300, \\ 2x_1 + \phantom{5}x_2 &\leqslant 100, \\ 2x_1 + 3x_2 &\leqslant 160. \end{aligned} \tag{6.41}$$

Полная стоимость запланированной к производству продукции выражается

формулой

$$f = x_1 + 1.2\,x_2. \tag{6.42}$$

**Данную задачу необходимо свести к канонической путем введения *дополнительных переменных* $x_3$, $x_4$, $x_5$**

$$\begin{aligned} 4x_1 + 5x_2 + x_3 &= 300, \\ 2x_1 + \ \ x_2 + x_4 &= 100, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_5 &= 160. \end{aligned}$$

При этом очевидно, что $x_3 \geqslant 0$, $x_4 \geqslant 0$, $x_5 \geqslant 0$. Заметим, что введение дополнительных неизвестных не повлияло на вид целевой функции (6.42), которая зависит только от параметров $x_1$, $x_2$. Фактически $x_3$, $x_4$, $x_5$ будут указывать остатки ресурсов, не использованные в производстве. Здесь мы имеем задачу максимизации, т. е. нахождения максимума целевой функции. Если функцию (6.42) взять со знаком минус и принять целевую функцию в виде

$$F = -x_1 - 1.2\,x_2. \tag{6.44}$$

то получим задачу минимизации для этой целевой функции.

Примем переменные $x_3$, $x_4$, $x_5$ в качестве базисных и выразим их через свободные переменные $x_1$, $x_2$ из уравнений (6.43). Получим

$$\begin{aligned} x_3 &= 300 - 4x_1 - 5x_2, \\ x_4 &= 100 - 2x_1 - \ \ x_2, \\ x_5 &= 160 - 2x_1 - 3x_2. \end{aligned} \tag{6.45}$$

В качестве опорного решения возьмем такое, которое соответствует нулевым значениям свободных параметров:

$$x_1^{(0)} = 0, \quad x_2^{(0)} = 0, \quad x_3^{(0)} = 300, \quad x_4^{(0)} = 100, \quad x_5^{(0)} = 160.$$

Этому решению соответствует нулевое значение целевой функции (6.44):

$$F^{(0)} = 0. \tag{6.46}$$

Исследуя полученное решение, отмечаем, что оно не является оптимальным, поскольку значение целевой функции (6.44) может быть уменьшено по сравнению с (6.46) путем увеличения свободных параметров.

Положим $x_2 = 0$ и будем увеличивать переменную $x_1$ до тех пор, пока базисные переменные остаются положительными. Из (6.45) следует, что $x_1$ можно увеличить до значения $x_1 = 50$, поскольку при большем его значении переменная $x_4$ станет отрицательной (отношение $100/(-2)$ является наименьшим по модулю среди отношений $300/(-4), 100/(-2), 160/(-2)$).

Таким образом, полагая $x_1 = 50$, $x_2 = 0$, получаем новое опорное решение (значения переменных $x_3, x_4, x_5$ найдем по формулам (6.45)):

$$x_1^{(1)} = 50, \quad x_2^{(1)} = 0, \quad x_3^{(1)} = 100, \quad x_4^{(1)} = 0, \quad x_5^{(1)} = 60. \tag{6.47}$$

Значение целевой функции (6.44) при этом будет равно

$$F^{(1)} = -50. \tag{6.48}$$

Новое решение (6.47), следовательно, лучше, поскольку значение целевой функции уменьшилось по сравнению с (6.46).

Следующий шаг начнем с выбора нового базиса. Примем ненулевые переменные в (6.47) $x_1$, $x_3$, $x_5$ в качестве базисных, а нулевые переменные $x_2$, $x_4$ в качестве свободных. Из системы (6.43) найдем

$$\begin{aligned} x_1 &= 50 - 0.5x_2 - 0.5x_4, \\ x_3 &= 100 - 3x_2 + 2x_4, \\ x_5 &= 60 - 2x_2 + x_4. \end{aligned} \tag{6.49}$$

Выражение для целевой функций (6.44) запишем через свободные параметры, заменив $x_1$ с помощью (6.49). Получим

$$F = -50 - 0.7x_2 + 0.5x_4. \tag{6.50}$$

Отсюда следует, что значение целевой функции по сравнению с (6.48) можно уменьшить за счет увеличения $x_2$ поскольку коэффициент при этой переменной в (6.50) отрицательный. При этом увеличение $x_4$ недопустимо, поскольку это привело бы к возрастанию целевой функции; поэтому положим $x_4 = 0$.

Максимальное значение переменной $x_2$ определяется соотношениями (6.49). Быстрее всех нулевого значения достигнет переменная $x_5$ при $x_2 = 30$. Дальнейшее увеличение $x_2$ поэтому невозможно. Следовательно, получаем новое опорное решение, соответствующее значениям $x_2 = 30$, $x_4 = 0$ и определяемое соотношениями (6.49):

$$x_1^{(2)} = 35, \quad x_2^{(2)} = 30, \quad x_3^{(2)} = 10, \quad x_4^{(2)} = 0, \quad x_5^{(2)} = 0. \tag{6.51}$$

При этом значение целевой функции (6.50) равно

$$F^{(2)} = -71.$$

Покажем, что полученное решение является оптимальным. Для проведения следующего шага ненулевые переменные в (6.51), т. е. $x_1$, $x_2$, $x_3$, нужно принять в качестве базисных, а нулевые переменные $x_4$, $x_5$ — в качестве свободных переменных. В этом случае целевую функцию можно записать в виде

$$F = -71 + 0.15\,x_4 + 0.35\,x_5.$$

Поскольку коэффициенты при $x_4$, $x_5$ положительные, то при увеличении этих параметров целевая функция возрастает. Следовательно, минимальное значение целевой функции $F_{\min} = -71$ соответствует нулевым значениям параметров $x_4$, $x_5$, и полученное решение является оптимальным.

Таким образом, ответ на поставленную задачу об использовании ресурсов следующий: для получения максимальной суммарной стоимости продукции при заданных ресурсах необходимо запланировать изготовление изделий А в количестве 35 штук и изделий Б в количестве 30 штук. Суммарная стоимость продукции равна 71 тыс. р. При этом все ресурсы стекла и рабочего времени будут использованы, а металла останется 10 кг.

# <u>Конец лекции</u>